INTERVALOVÁ KORELACE EKONOMICKÝCH INDIKÁTORŮ

INTERVAL CORRELATION OF ECONOMIC INDICATORS

Zdeněk Karpíšek, Jitka Sládková, Marianna Dražanová

Abstrakt

V článku je prezentováno netradiční pojetí a popis korelace mezi ekonomickými nebo finančními indikátory pomocí tzv. intervalového koeficientu korelace, jehož definice je založena na pojmech a metodách intervalové analýzy. Intervalový koeficient korelace je pak aplikovaný na výpočet korelace kvartálních hodnot HDP České republiky a denního kurzu CZK vzhledem EUR a USD metodou Monte Carlo.

Klíčová slova

Intervalová aritmetika, intervalová funkce, intervalový koeficient korelace, metoda Monte Carlo.

Abstract

The article presents a non-traditional concept and a description of the correlation between economic or financial indicators using the so-called interval correlation coefficient, the definition of which is based on the concepts and methods of interval analysis. The interval correlation coefficient is then applied to the calculation of the correlation of the quarterly values of the GDP of the Czech Republic and the daily exchange rate of CZK with respect to EUR and USD using the Monte Carlo method.

Keywords

Interval arithmetic, interval function, interval correlation coefficient, Monte Carlo method.

JEL klasifikace

C53, C46, E01

1 ÚVOD

Motivací k tomuto příspěvku bylo získat intervalový odhad koeficientu korelace z expertních nebo statistických intervalových odhadů hodnot pozorované ekonomické nebo finanční veličiny (znaku, ukazatele, indikátoru), a to pomocí intervalové aritmetiky. Důvodem k takovému odhadu je skutečnost, že v praxi se často nepřesné hodnoty pozorovaných veličin považují za zcela přesné, tedy nikoli např. ve formě intervalů. Závěry vyvozené klasickými statistickými metodami z těchto nepřesných hodnot pak ale nemusí odpovídat skutečnosti. Dalším důvodem je také to, že pozorované hodnoty ekonomických časových řad mohou mít po částech kumulativní charakter a s nimi korelující řady okamžikový charakter s jemnějším časovým dělením.

2 INTERVALOVÁ ANALÝZA A METODA MONTE CARLO

Intervalovým číslem rozumíme [2], [3] uzavřený reálný interval [a, b], $a \le b$, kde a, b jsou reálná čísla. ***Aritmetické operace s intervalovými čísly*** definujeme vztahy:

$$\begin{aligned}
&[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d],\\
&[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c],\\
&[a,b]\cdot[c,d]=[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}],\\
&[a,b]/[c,d]=[a,b]\cdot[1/d,1/c] \text{ pro } 0\notin[c,d].
\end{aligned} \tag{1}$$

Pro $\forall a\in(-\infty,\infty)$ klademe $a=[a,a]$. Jestliže $a > 0$, pak píšeme $[a,b]>0$ atd. Zřejmě je

$$\lambda[a,b]=\begin{cases}[\lambda a,\lambda b] \text{ pro } \lambda>0,\\ \quad 0 \quad \text{ pro } \lambda=0,\\ [\lambda b,\lambda a] \text{ pro } \lambda<0,\end{cases} \tag{2}$$

kde $\lambda\in(-\infty,\infty)$.V aplikacích dle potřeby symbol operace násobení · vynecháváme a symbol operace dělení / nahrazujeme zlomkem.

Jestliže *J*, *K*, *L*, *M* jsou intervalová čísla, pak platí:

$$\begin{array}{ll} J+K=K+J, & 0+J=J, \\ J+(K+L)=(J+K)+L, & 1\cdot J=J, \\ J\cdot K=K\cdot J, & J\cdot(K+L)\subset\left(J\cdot K\right)+\left(J\cdot L\right). \\ J\cdot(K\cdot L)=(J\cdot K)\cdot L, & \end{array} \tag{3}$$

Speciálně pro $K\cdot L>0$ je $J\cdot(K+L)=J\cdot K+J\cdot L$.

Jestliže $J\subset L$ a $K\subset M$, pak

$$\begin{array}{l} J+K\subset L+M, \\ J-K\subset L-M, \\ J\cdot K\subset L\cdot M, \\ J/K\subset L/M,\ (0\notin M). \end{array} \tag{4}$$

Jestliže $J=[a,b]$ a $K=[c,d]$, pak pro $a\geq 0,\ c\geq 0$ je $J\cdot K=[ac,bd]$, pro $b\leq 0,\ d\leq 0$ je $J\cdot K=[bd,ac]$ a pro $a>0, c>0$ je $J/K=[a/d,b/c]$.

Jestliže $y=f(x_1,...,x_n)$ je reálná funkce a $I_1,...,I_n$ jsou intervalová čísla, pak ***intervalovou hodnotou*** této funkce rozumíme intervalové číslo (pokud existuje)

$$[\min f(x_1,...,x_n),\max f(x_1,...,x_n)], \tag{5}$$

kde $(x_1,...,x_n)\in I_1\times\cdots\times I_n$, a hovoříme o ***intervalové funkci*** $f(I_1,...,I_n)$.

Jestliže spojitá funkce $y=f(x_1,...,x_n)$ na množině $I_1\times\cdots\times I_n$ je rostoucí ve všech nezávisle proměnných na množině $I_1\times\cdots\times I_n$, pak

$$[\min f(x_1,...,x_n),\max f(x_1,...,x_n)] = [f(\min I_1,...,\min I_n), f(\max I_1,...,\max I_n)].$$

Analogicky pro spojitou funkci $y=f(x_1,...,x_n)$ klesající ve všech nezávisle proměnných na množině $I_1\times\cdots\times I_n$ je

$$[\min f(x_1,...,x_n),\max f(x_1,...,x_n)] = [f(\max I_1,...,\max I_n), f(\min I_1,...,\min I_n)].$$

Jestliže funkce $y=f(x_1,...,x_n)$ není rostoucí ani klesající ve všech svých proměnných, určíme její intervalovou hodnotu výpočtem jejího absolutního minima a absolutního maxima na množině $I_1\times\cdots\times I_n$ pomocí obvyklých analytických postupů nebo některé nelineární optimalizační metody na PC výpočtem vázaných extrémů na množině $I_1 \times \cdots \times I_n$, případně ji odhadneme simulační metodou Monte Carlo [1]. Tato metoda spočívá v realizaci dostatečně velkého počtu náhodných pokusů, kdy z intervalových čísel $I_1,...,I_n$ vybereme náhodná čísla $x_{ij} \in I_i$, $i=1,\ldots,n$ a $j=1,\ldots,N$. Počet n-tic $(x_{1j},\ldots,x_{nj})$ obvykle volíme aspoň N = 10000 a čísla x_{ij} jsou hodnoty vzájemně nezávislých náhodných veličin X_{ij} s rovnoměrnými rozděleními pravděpodobnosti na intervalech $I_1,...,I_n$. Pro všechny n-tice $(x_{1j},\ldots,x_{nj})$ vypočteme hodnoty funkce $y = f(x_1,...,x_n)$ a získáme tak statistický soubor $(y_1,...,y_N)$. Intervalovou hodnotu $[\min f(x_1,...,x_n), \max f(x_1,...,x_n)]$ této funkce v intervalových číslech $I_1,...,I_n$ pak aproximujeme intervalovým číslem $[\min y_j, \max y_j]$, $j=1,...,N$.

3 INTERVALOVÝ KOEFICIENT KORELACE

Jestliže místo hodnot x_i kvantitativního statistického souboru $(x_1,...,x_n)$ uvažujeme intervalová čísla $[\min x_i, \max x_i]$, tj. intervaly obsahující x_i, $i=1,...,n$, dostaneme ***intervalový statistický soubor***

$$\left([\min x_1, \max x_1],...,[\min x_n, \max x_n]\right) \tag{6}$$

Analogicky modelujeme intervalově i dvourozměrný kvantitativní statistický soubor $\left((x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\right)$ ***dvourozměrným intervalovým statistickým souborem***

$$\left([\min x_1, \max x_1]\times[\min y_1, \max y_1],...,[\min x_n, \max x_n]\times[\min y_n, \max y_n]\right) \tag{7}$$

Podle definice koeficientu korelace [1] a předcházející definice intervalové funkce pak rozumíme ***intervalovým koeficientem korelace*** intervalovou hodnotu funkce

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}, \tag{8}$$

kde $\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou aritmetické průměry statistických souborů $(x_1,...,x_n)$ a $(y_1,...,y_n)$, tj. interval

$$[\min r, \max r] \tag{9}$$

na množině všech dvojic $(x_i, y_i) \in [\min x_1, \max x_1] \times [\min y_1, \max y_1]$, $i = 1,...,n$.

Vzhledem k tomu, že výpočet intervalového koeficientu korelace (9) pomocí vázaných extrémů funkce (8), příp. nelineárních optimalizačních metod na PC, je obecně velmi složitý (ne-li nemožný), odhadujeme $[\min r, \max r]$ simulační metodou Monte Carlo na PC.

Abychom posoudili korelaci kvartálních hodnot hrubého domácího produktu HDP České republiky a denních kurzů CZK vzhledem k EUR a USD v letech 1999 až 2018, použili jsme intervalový koeficient korelace. Pro výpočet jsme hodnoty denních kurzů v jednotlivých kvartálech nahradili kvartálními hodnotami kurzů min EUR, max EUR, min USD a max USD v každém kvartálu. Výpočet odhadu intervalového koeficientu korelace jsme provedli metodou Monte Carlo pro *N* = 10000 pokusů. Získané hodnoty intervalových koeficientů a také pro porovnání „neintervalové“ koeficienty korelace průměrných a mediánových kvartálních kurzů vzhledem ke kvartálním HDP jsou v Tabulce 1.

Tabulka 1: Koeficienty korelace HDP a kvartálních kurzů

Kurz	$[\min r, \max r]$	*r* pro kvartální průměr kurzu	*r* pro kvartální medián kurzu
EUR	[-0,83854; -0,81177]	-0,83368	-0,83272
USD	[-0,72482; -0,67766]	-0,70487	-0,70642

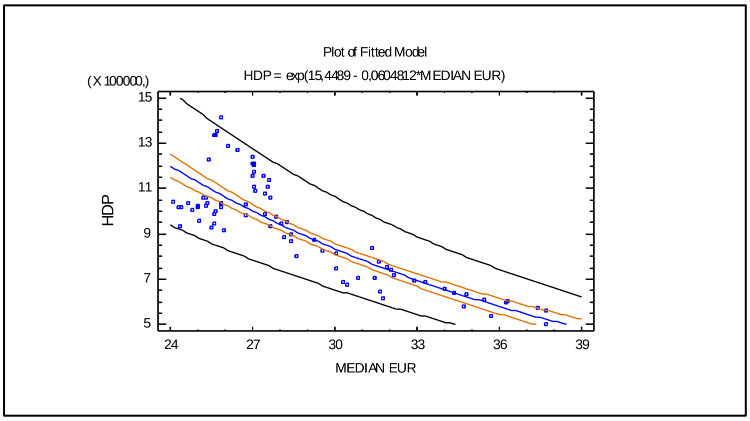
Zdroj: vlastní

Tabulka 1 dokládá užitečnost intervalového pojetí vstupních dat pro odhad korelace. Důvodů k aplikaci intervalového koeficientu korelace je více, např.:

- skutečná hodnota každé měny a tím také HDP je neurčitá a obvykle v čase klesající,
- pozorované hodnoty kurzu i HDP mají těžko odhadnutelné a verifikovatelné rozdělení pravděpodobnosti,

- průběh i závislost kvartálních hodnot HDP a kurzů CZK vzhledem k EUR a USD v čase je zřetelně nelineární, viz např. Obrázek 1, kde HDP je kvartální hodnota hrubého domácího produktu v CZK a MEDIAN EUR je medián denních hodnot kurzu CZK vzhledem k EUR během jednoho kvartálu.

Obrázek 2: Závislost kvartálních hodnot HDP a kvartálních hodnot kurzu CZK



Zdroj: vlastní

4 ZÁVĚR

Matematické modelování neurčitých veličin je od 20. století založeno zejména na jejich stochastickém pojetí, intervalové analýze a teorii fuzzy množin. Stochastické pojetí umožňuje aplikaci matematicko-statistických metod a má víceméně objektivní charakter, avšak je často omezeno neznalostí pozorovaných pravděpodobnostních rozdělení a složitostí výpočtů. Intervalové a fuzzy pojetí má sice subjektivní charakter, ale umožňuje naopak respektovat expertní pohled na neurčitost pozorovaných dat. Výsledky naznačené v tomto článku dokládají vhodnost intervalového přístupu pomocí intervalové analýzy, a navíc uvedená metodika výpočtu intervalového koeficientu korelace nevyžaduje složité výpočty na PC. Intervalový přístup a jeho přínos při hledání lineárního trendu časové řady je popsán v [3], kde jsou také prezentovány dosti překvapivé výsledky.

AFILACE

Příspěvek je součástí řešení výzkumných grantových projektů IGA_AS_03_01/2 a IGA AS_04 AKADEMIE STING v Brně.

POUŽITÉ ZDROJE

[1] MONTGOMERY, D. C. a RUNGER, G. *Applied Statistics and Probability for Engineers.* 5th ed. New York: John Wiley, 2010. 784 s. ISBN 978-0-470-05304-1.

[2] MOOR, R. E., KEARFOTT, R. B. a CLOUD, M. J. *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia: SIAM 2009, 459 s. ISBN 978-0-898716-69-6.

[3] KARPISEK, Z. LACINOVA, V., SADOVSKY, Z., SCHNEIDER, A. Is the Increasing Trend Always Really Increasing? MENDEL 2016 – 22th International Conference on Soft Computing. Brno, 2016. *Mendel Series*, Volume 2016, p. 229-234. ISSN 1803-3814, ISBN 978-80-214-5365-4.

AUTOŘI

doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc., Katedra aplikovaných disciplín, AKADEMIE STING, o.p.s., Stromovka 1, 637 00 Brno, e-mail: karpisek@sting.cz.

Ing. Jitka Sládková, Ph.D., Katedra ekonomiky a řízení, AKADEMIE STING, o.p.s., Stromovka 1, 637 00 Brno, e-mail: jitka.sladkova@post.sting.cz.

doc. Ing. Marianna Dražanová, CSc., Katedra ekonomiky a řízení, AKADEMIE STING, o.p.s., Stromovka 1, 637 00 Brno, e-mail: drazanova@post.sting.cz.

AUTHORS

doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc., Department of Applied Disciplines, STING ACADEMY, Stromovka 1, 637 00 Brno, Czech Republic, e-mail: karpisek@sting.cz.

Ing. Jitka Sládková, Ph.D., Department of Economics and Management, STING ACADEMY, Stromovka 1, 637 00 Brno, Czech Republic, e-mail: jitka.sladkova@post.sting.cz.

doc. Ing. Marianna Dražanová, CSc., Department of Economics and Management, STING ACADEMY, Stromovka 1, 637 00 Brno, Czech Republic, e-mail: drazanova@post.sting.cz.